**§ 2. Ряды Фурье по ортогональным системам функций**

**п. 1. Скалярное произведение функций. Норма функции**

**Определение.** Функция , заданная на отрезке , называется *функцией с интегрируемым квадратом*, если она сама и ее квадрат интегрируемы на , т. е. если существуют интегралы  и .

Пусть  и  – функции с интегрируемым квадратом на . Тогда функции  и  также интегрируемы на  (это следует из неравенства .

В дальнейшем будем всюду предполагать, что рассматриваем функции с интегрируемым квадратом.

**Определение.** *Скалярным произведением двух функций*  и , заданных на отрезке , называется число

. (1)

**Определение.** *Нормой функции*  на  называется число

. (2)

***Пример.***  Найти норму функции  на отрезке .

***Решение.*** ▲ 



.

Аналогично, .

На отрезке : . ▲

Всякую систему функций , не содержащую функций с равной нулю нормой, можно нормировать, т. е. можно подобрать числа  так, что система функций будет нормированной.

Действительно, из равенства



следует, что

, (3)

причем знак у корня можно брать любой. Число  называется *нормирующим множителем*. В дальнейшем его будем брать со знаком .

Таким образом, чтобы нормировать некоторую систему функций, надо каждую функцию этой системы умножить на соответствующий ей нормирующий множитель.

**п. 2. Ортогональные функции**

**Определение.** Две функции  и  называются *ортогональными* на , если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

. (4)

Система функций  называется *ортогональной* на , если



Система функций  называется *ортонормированной* на , если составляющие ее функции попарно-ортогональны и норма каждой функции равна единице, т. е.

 (5)

Примером ортонормированной системы функций является система

 .

**п. 3. Многочлены Лежандра**

Классическим примером ортогональных на отрезке  функций являются многочлены Лежандра, которые определяются формулой

. (6)

Многочлен Лежандра является *n*-ой производной от многочлена степени 2*n* и, следовательно, он имеет степень *n*. Выполнив последовательное дифференцирование, найдем несколько первых многочленов:



.

Норма многочленов Лежандра на  равна

. (7)

**п. 4. Ряд Фурье по ортогональной системе функций**

Пусть  – интегрируемая на  функция, и пусть  – система ортогональных функций на этом отрезке. Предположим, что  можно представить на  равномерно сходящимся рядом

. (8)

где – постоянные числа, называемые *коэффициентами* этого ряда. Найдем их. Для этого умножим обе части равенства (8) на  и проинтегрируем результат почленно на . Получим (с учетом ортогональности функций ):

 .

Отсюда

 . (9)

Числа , определяемые формулой (9), называются *коэффициентами Фурье* *функции  по ортогональной системе функций* , а ряд (8) – *рядом Фурье* *функции  по этой системе*.

Если система функций  ортонормирована, то формула (9) приобретает вид

 . (10)

Коэффициенты Фурье  можно вычислить по формуле (9) для любой интегрируемой на  функции, и каждой такой функции можно поставить в соответствие её ряд Фурье по ортогональной системе:

. (11)

Условия, при которых в соотношении (11) знак соответствия можно заменить на знак равенства, зависят как от свойств функции , так и от свойств ортогональной системы функций .

Если , где  – многочлены Лежандра, то ряд (8) называется рядом Фурье – Лежандра функции :

. (12)

При этом коэффициенты Фурье определяются по формулам

 . (13)

**Пример.** Разложить в ряд Фурье – Лежандра на отрезке  функцию .

***Решение.*** ▲ По формулам (13) получаем:

;

;

;

.

Так как  – многочлен третьей степени, то все последующие коэффициенты  равны нулю. Таким образом, разложение Фурье – Лежандра имеет вид:

. ▲

**п. 5. Свойство минимальности коэффициентов Фурье**

Пусть  – ортогональная на  система функций. Выражение



называется многочленом *n*-го порядка по этой ортогональной системе (здесь  – некоторые числа).

Предположим, что ** – функция с интегрируемым квадратом на . Величина

 (14)

называется *квадратичным уклонением* многочлена  от функции ** на отрезке Коэффициенты , при которых квадратичное уклонение минимально, называются *коэффициентами наилучшего приближения* многочлена  к функции **. Найдем их.



 (15)

так как согласно формуле (9) , и  при , а .

Выделяя в правой части равенства (15) полный квадрат, находим

. (16)

Так как  – *const* и  – *const* (они не зависят от **), то из равенства (16) следует, что величина  будет минимальной, если **.

Таким образом, коэффициентами наилучшего приближения функции ** многочле-ном  являются коэффициенты Фурье этой функции по ортогональной системе. В этом и заключается *свойство минимальности коэффициентов Фурье*.

Из свойства минимальности коэффициентов Фурье и формулы (16) следует, что минимальное квадратичное уклонение

. (17)

**п. 6. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.**

Так как , то из формулы (17) получаем неравенство

, (18)

справедливое для любых *n*. Левая часть неравенства (18) при возрастании *n* монотонно возрастает и остается ограниченной числом . Это означает, что ряд  сходится и имеет место неравенство

, (19)

называемое *неравенством Бесселя*. Из соотношений (16), (17) следует, что величина  будет стремиться к нулю при  тогда и только тогда, когда выполняется равенство

, (20)

которое называется *уравнением замкнутости или равенством Парсеваля-Стеклова*.

Если система функций  ортонормированная, то неравенство Бесселя (19) примет вид

,

а равенство Парсеваля-Стеклова

.

В частности, для - периодической функции ** для коэффициентов Фурье неравенство Бесселя записывается в виде

, (21)

а равенство Парсеваля-Стеклова – в виде

. (22)

Для - периодической функции ** имеем соответственно неравенство Бесселя

, (23)

и равенство Парсеваля-Стеклова

. (24)

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию на отрезке  и найти с помощью равенства Парсеваля сумму ряда .

***Решение.*** ▲ Так как  – четная функция, то коэффициенты .

.







.

Таким образом, ряд Фурье функции  на отрезке  имеет вид

.

Учитывая равенство Парсеваля-Стеклова (22) получаем:

.

Отсюда имеем

, так как ;

. ▲